

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Моряковой Алены Романовны «Анализ колебательных решений некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом» по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Актуальность

Колебания в нелинейных системах играют важную роль во многих разделах механики, физики, биологии, техники и др. Их теоретический анализ позволяет предсказать особенности поведения различных систем из указанных областей естествознания. Особый интерес представляют системы с запаздыванием или отклоняющимся аргументом. Начиная с классических работ А.Д. Мышкиса, интерес к этим системам неуклонно возрастает. Это объясняется, в первую очередь, многочисленными приложениями, которые находят уравнения с запаздыванием в физике и биологии. К настоящему времени в рамках означенной тематики опубликованы десятки тысяч работ, тем не менее, ряд важных вопросов остается открытым. Поэтому задача изучения динамических режимов в системах с запаздыванием и, в частности, периодических режимов, представляется весьма актуальной и современной.

Общая характеристика работы

Предметом исследования диссертационной работы Моряковой А.Р. являются колебательные решения нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, являющихся математическими моделями ряда прикладных задач. Диссертация состоит из трех глав.

В первой главе исследуется нелинейное дифференциально — разностное уравнение второго порядка, содержащее запаздывающие слагаемые от неизвестной функции и ее производной, возникающее при моделировании работы электронных устройств с запаздывающей обратной связью. Проводится детальный анализ возможных вариантов потери устойчивости нулевого решения указанного уравнения и возникающих при этом возможных критических случаев. Выделяется критический случай внутреннего резонанса 1:3 и изучаются бифурцирующие при этом из нулевого состояния равновесия колебательные решения. Отмечу, что указанный критический случай в уравнениях такого типа ранее не изучался. Показана возможность реализации хаотических колебаний. Этот режим детально исследован: вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность.

Вторая часть диссертации посвящена исследованию двух сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Рассмотрено уравнение Мэкки — Гласса, являющееся математической моделью процессов кроветворения, и уравнение Икеды, описывающее динамику пассивного оптического резонатора. Изучению уравнений Мэкки - Гласса и Икеды посвящено большое число исследований, где на основании численного интегрирования показано, что уравнения способны демонстрировать сложную динамику. В работе изучаются периодические решения уравнений, бифурцирующие из различных состояний равновесия, с помощью качественной теории дифференциальных уравнений, что позволило получить строгие теоремы об условиях бифуркаций периодических решений и построить асимптотические формулы периодических решений.

Во второй главе рассматривается уравнение Мэкки - Гласса. Уравнение, записанное в безразмерных переменных, содержит малый параметр при производной, а значит является сингулярным. С помощью метода равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка изучаются периодические решения уравнения, бифурцирующие из его единственного положительного состояния равновесия. Построена нормальная форма уравнения, содержащая уравнения для "быстрых" и "медленных" переменных. Показано, что состояния равновесия уравнений "медленных" переменных определяют периодические решения исходного уравнения. Получены строгие теоремы об условиях бифуркаций периодических решений и построены асимптотические формулы периодических решений. С помощью этих формул построены периодические решения уравнения Мэкки — Гласса и показана возможность одновременной бифуркации большого числа устойчивых периодических решений - явления мультистабильности.

В третьей главе изучаются периодические решения уравнения Икеды. Проведен численный анализ состояний равновесия уравнения в зависимости от параметров. Как и в предыдущей главе, используется метод равномерной нормализации, позволяющий свести задачу нахождения периодических решений исходного уравнения к анализу счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей уравнения для «быстрых» и «медленных» переменных. Построены периодические решения исходного уравнения и изучены их бифуркации в зависимости от параметров уравнения. Показана возможность одновременной бифуркации большого числа устойчивых периодических решений - явления мультистабильности.

Основные результаты диссертации

1) Для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, содержащего нелинейные запаздывающие слагаемые от искомой функции и ее производной, исследованы возможные критические случаи

потери устойчивости нулевого решения. Проведен анализ бифуркаций автоколебательных решений в критическом случае внутреннего резонанса 1:3. Показана возможность существования сложных, в том числе хаотических, колебательных решений.

2) Изучены периодические решения уравнения Мэки - Гласса, бифурцирующие из единственного положительного состояния равновесия с помощью метода равномерной нормализации. Получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений, построены асимптотические формулы периодических решений. Показана возможность явлений мультистабильности и хаотической мультистабильности.

3) Изучена динамика состояний равновесия уравнения Икеды в зависимости от параметров уравнения и исследована их устойчивость. Построены асимптотические формулы периодических решений. Изучены бифуркации периодических решений из различных состояний равновесия. Показано, что в уравнении Икеды может наблюдаться мультистабильность и хаотическая мультистабильность.

Достоверность результатов

Достоверность представленных результатов основана на корректном использовании классических методов нелинейного анализа, теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, совпадении теоретических результатов с результатами компьютерного моделирования. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы, в том числе в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ. Результаты диссертации неоднократно обсуждались на различных конференциях и получили одобрение ведущих специалистов.

Недостатки диссертационной работы

1) Представляется не совсем уместным нумерация теорем (сквозная, начиная с введения), таким образом, каждая из теорем имеет два номера; не подписаны оси координат на большом количестве рисунков, в частности на страницах 89-97 диссертации.

2) В доказательстве теоремы 9 (или теоремы 2) автор приводит асимптотику решения по целочисленному индексу, однако, это решение никак с означенным индексом не связано.

3) Теорема 10 (стр. 48 диссертации) сформулирована явно не аккуратно: ее словесная формулировка противоречит приведенным в рамках этой же теоремы соотношениям.

